



# Keintegralan dalam Konsep Jumlah Bawah $L(P_n, f)$ dan Jumlah atas $U(P_n, f)$ dengan Uji $\lim_{n \rightarrow \infty} (U(P_n, f) - L(P_n, f)) = 0$

Ruslan Laisouw <sup>1✉</sup>

<sup>1</sup> Program Studi Matematika, Fakultas Teknik Universitas Muhammadiyah Maluku Utara, Ternate, Indonesia.

Email : [ruslanlaisouw@gmail.com](mailto:ruslanlaisouw@gmail.com)

Info Artikel :	<input type="checkbox"/> Artikel Penelitian	<input type="checkbox"/> Artikel Pengabdian	<input checked="" type="checkbox"/> Riview Artikel
Diterima : 26 Jan. 2024, Disetujui : 24 Juni 2024, Publikasi On-Line : 27 Juni 2024			

Vol.	No.
<b>4</b>	<b>1</b>
Hal 16 - 22	

## Abstrak

Dalam integral tentu, beberapa Perhitungannya yang terkait dengan konsep jumlah atas  $U(P_n, f)$  dan jumlah bawah  $L(P_n, f)$  juga sulit, untuk fungsi yang terkait bentuk  $\sum_{k=1}^n k^t$  dengan  $3 < t \leq 6, t \in N$ . Sehingga yang menjadi permasalahan dalam makalah ini adalah keintegralan jumlah bawah  $L(P_n, f)$  dan jumlah atas  $U(P_n, f)$  pada fungsi  $f(x) = x^t$ , untuk  $3 < t \leq 6, t \in N$  dengan domain  $I = [0, 1]$ . Metode yang digunakan adalah kajian pustaka/teoritik yakni dengan mengumpulkan referensi yang terkait yang untuk menjawab permasalahan yang ada, dengan menggunakan rumus  $\sum_{k=1}^n k^t, 3 < t \leq 6, t \in N$  dengan uji  $\lim_{n \rightarrow \infty} (U(P_n, f) - L(P_n, f)) = 0$ . Tujuan yang diperoleh adalah untuk mengetahui keintegralan jumlah bawah  $L(P_n, f)$  dan jumlah atas  $U(P_n, f)$  pada fungsi  $f(x) = x^t$ , untuk  $3 < t \leq 6, t \in N$  dengan domain  $I = [0, 1]$ . Hasil jumlah bawah  $L(P_n, f)$  dan jumlah atas  $U(P_n, f)$  dari fungsi  $f(x) = x^t, 3 < t \leq 6, t \in N$  secara berurutan untuk  $t = 4, t = 5$  dan  $t = 6$  sebagai berikut:

$$L(P_n, f) = \frac{1}{5} [1 - \frac{5}{2n} + \frac{5}{3n^2} - \frac{1}{6n^4}] \text{ and } U(P_n, f) = \frac{1}{5} [1 + \frac{5}{2n} + \frac{5}{3n^2} - \frac{1}{6n^4}]$$

$$L(P_n, f) = \frac{1}{6} [1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{2n^2} - \frac{1}{2n^4}] \text{ and } U(P_n, f) = \frac{1}{6} [1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{2n^2} - \frac{1}{2n^4}]$$

$$L(P_n, f) = \frac{1}{7} [1 - \frac{7}{2n} + \frac{7}{2n^2} - \frac{7}{6n^4} + \frac{1}{6n^6}] \text{ and } U(P_n, f) = \frac{1}{7} [1 + \frac{7}{2n} + \frac{7}{2n^2} - \frac{7}{6n^4} + \frac{1}{6n^6}]$$

Berdasarkan hasil jumlah bawah  $L(P_n, f)$  dan jumlah atas  $U(P_n, f)$  pada fungsi  $f(x) = x^t$ , untuk  $3 < t \leq 6, t \in N$  dengan domain  $I = [0, 1]$  diperoleh bahwa  $\lim_{n \rightarrow \infty} (U(P_n, f) - L(P_n, f)) = 0$ , artinya bahwa fungsi yang didefinisikan terintegralkan pada  $I$  domain yang diberikan.

Peer-Reviewed

Keyword :

Integral, Jumlah bawah, Jumlah atas, Uji limit

Koresponden Author :

Ruslan Laisouw

Email : [ruslanlaisouw@gmail.com](mailto:ruslanlaisouw@gmail.com)  
Univ. Muhammadiyah Maluku Utara, Ternate, Indonesia

Copyright© 2023. Ruslan Laisouw

Copyright© 2024. Ruslan Laisouw

## I. PENDAHULUAN

Konsep integral sering digunakan untuk menentukan luas daerah dibawah kurva dan mencari suatu penyelesaian dari suatu model matematika [1]. Dalam konteks integral tentu (Integral Riemann), kita dapat menghitung beberapa integral tentu, dari definisi langsung karena kita mempunyai rumus-rumus manis  $\sum_{k=1}^n k^t$  untuk  $t \leq 3, t \in N$  [2]. Beberapa Perhitungan dari definisi langsung juga sulit, untuk fungsi yang terkait bentuk  $\sum_{k=1}^n k^t$  dengan  $3 < t \leq 6, t \in N$ . Perhitungan integral tentu berdasarkan definisi selalu terkait konsep jumlah atas  $U(P_n, f)$  dan jumlah bawah  $L(P_n, f)$  dan parameter keintegralanya dapat dilihat pada limit selisih  $U(P_n, f)$  dengan  $L(P_n, f)$ . Perhatian penulis adalah pada konsep jumlah bawah  $L(P_n, f)$  dan jumlah atas  $U(P_n, f)$  dengan uji  $\lim_{n \rightarrow \infty} (U(P_n, f) - L(P_n, f)) = 0$ , sebagai kriteria keintegralan pada domain fungsi yang diberikan.

## II. KAJIAN TEORI

### 2.1. Sifat dan pengertian $\Sigma$

Sifat  $\Sigma$  dipikirkan sebagai suatu operator,  $\Sigma$  beroperasi pada barisan dan bersifat linieritas [3]. Di sini  $\Sigma$  menyarankan kita untuk menjumlahkan barisan bilang yang dimiliki, yang dikenal dengan nama deret. Dalam ensiklopedia matematika, deret diartikan sebagai suku-suku suatu barisan bilangan dijumlahkan [4]. Deret juga diartikan sebagai rangkaian bilangan yang tersusun secara teratur dan memenuhi kaidah-kaidah tertentu [5].

Dari penjelasan di atas, jika diberikan barisan bilangan  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  maka  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$  dinamakan deret. Beberapa barisan hingga bilangan asli  $\mathbb{N}$  dan perpangkatannya yang disajikan dalam bentuk  $\sum_{k=1}^n k^t$  untuk  $t \leq 4, t \in \mathbb{N}$ , misalnya  $\sum_{k=1}^n k^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$ , bentuk yang lain dapat dilihat pada [1]. Sedangkan dalam [6] telah dibangun rumus  $\sum_{k=1}^n k^t$  untuk  $4 < t \leq 6, t \in \mathbb{N}$ , diantaranya:

$$\begin{aligned} \text{i). } \sum_{k=1}^n k^5 &= 1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5 = \frac{n^2(2n^4+6n^3+5n^2-1)}{12} \\ \text{ii). } \sum_{k=1}^n k^6 &= 1^6 + 2^6 + 3^6 + \dots + n^6 = \frac{n(12n^6+42n^5+42n^4-14n^2+2)}{84} \end{aligned}$$

### 2.2. Sifat Kelengkapan Bilangan Riil

#### Definis 1 [7]

Misalkan S adalah suatu himpunan tidak kosong dari  $\mathbb{R}$ .

- i). Himpunan S terbatas di atas jika ada  $b \in \mathbb{R}$  sehingga  $x \leq b \forall x \in S$ . Bilangan b disebut suatu batas atas dari S. Jika  $b \in S$ , maka b disebut unsur maksimum S.
- ii). Himpunan S terbatas di bawah jika ada  $b \in \mathbb{R}$  sehingga  $x \geq b \forall x \in S$ . Bilangan b disebut suatu batas bawah dari S. Jika  $b \in S$ , maka b disebut unsur minimum S.

#### Definisi 2 [7]

Misalkan S suatu himpunan bagian tidak kosong dari  $\mathbb{R}$

- i). Bilangan a batas atas terkecil (supremum) S ditulis  $a = \sup S$ , jika a adalah batas atas dari S, apabila h adalah suatu batas atas lain dari S, maka  $a \leq h$ .
- ii). Bilangan b batas bawah terbesar (infimum) S ditulis  $b = \inf S$ , jika b adalah batas bawah dari S, apabila h adalah suatu batas bawah lain dari S, maka  $b \geq h$ .

### 2.3. Sifat Archimedes.

**Teorema 1 (Sifat Archimedes)** [8] Jika  $x \in \mathbb{R}$ , maka terdapat  $n_x \in \mathbb{N}$  sehingga  $x < n_x$

**Teorema akibat 1.1** [8] Jika y dan z bilangan real positif, maka: (i). Terdapat  $n \in \mathbb{N}$  sehingga  $z < ny$ , (ii). Terdapat  $n \in \mathbb{N}$  sehingga  $0 < \frac{1}{n} < y$ , (iii). Terdapat  $n \in \mathbb{N}$  sehingga  $n - 1 \leq z < n$ .

### 2.4. Limit Barisan

#### Definisi 3 [8].

Misal  $X = (x_n)$  barisan bilangan real. Bilangan real x dikatakan limit darai X jika untuk sebarang bilangan  $\varepsilon > 0$  terdapat bilangan asli  $K = K(\varepsilon)$  sehingga setiap  $n \geq K$  berlaku  $|x_n - x| < \varepsilon$ .

Contoh: Buktikan bahwa  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n}) = 0$

Misalkan  $x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ . Diberikan sebarang  $\varepsilon > 0$ . Dengan sifat Archimedes (ii) di atas terdapat  $K \in \mathbb{N}$  sehingga  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ . Akibatnya setiap  $n \geq K$  berlaku  $|x_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon$ . Ini artinya bahwa terbukti  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n}) = 0$

### 2.5. Fungsi

Fungsi adalah relasi dengan pembatasan tambahan yang untuk setiap nilai domain di sana sesuai satu dan hanya satu nilai jangkauan. (Semua fungsi adalah relasi, tetapi beberapa relasi bukan fungsi) [9].

**Definisi 4 [10]**

Sebuah fungsi  $f$  dari  $A$  ke  $B$  adalah suatu aturan korespondensi (padanan) yang menghubungkan setiap obyek daerah asal ( $A$ ) dengan sebuah nilai tunggal  $B$  dari obyek daerah hasil  $f(A)$ .

Misalkan  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dengan  $f(x) = x^3$ . Fungsi  $f$  disebut fungsi yang memetakan setiap  $x \in \mathbb{R}$  ke pangkat tiganya.

**2.6. Kontinuan Fungsi**

**Definis 5 [1]**

Suatu fungsi  $f$  kontinu di titik  $c$  jika jika beberapa selang terbuka disekitar  $c$  terkandung dalam daerah asal  $f$  dan  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ .

**2.7. Partisi dan Jumlah Riemann**

**2.7.1. Partisi**

Sebuah fungsi  $f$  didefinisikan pada interval tertutup  $I = [a, b]$ . Fungsi ini bisa bernilai positif ataupun negatif pada interval tersebut dan bahkan tidak perlu kontinu. Misalkan suatu partisi  $P$  membagi interval  $[a, b]$  menjadi  $n$  sub-interval (tidak perlu sama panjang) dengan  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ . Jarak tiap sub-interval  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ , dilambangkan dengan  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ . Jika  $1 \leq k \leq n$ , maka  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$  [11].

**2.7.2. Jumlah Riemann**

**Definisi 6 [8]**

Misalkan  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  fungsi terbatas pada  $I = [a, b]$  dan  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  adalah partisi pada  $I$ , untuk  $k = 1, 2, \dots, n$  didefinisikan  $m_k = \inf \{f(x) | x \in [x_{k-1}, x_k]\}$  dan  $M_k = \sup \{f(x) | x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ .

Jumlah bawah dari  $f$  pada  $P$  didefinisikan dengan  $L(P, f) = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1})$ ,

Dan jumlah atas dari  $f$  pada  $P$  didefinisikan dengan  $U(P, f) = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1})$

**Lemma 1 [8]**

Jik  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  fungsi terbatas dan  $P$  adalah sebarang partisi dari  $I$  maka  $L(P, f) \leq U(P, f)$ .

**Bukti.** Misalkan  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ . Karena  $m_k \leq M_k$  dan  $x_k - x_{k-1} > 0$  untuk  $k=1, 2, \dots, n$ , maka  $L(P, f) = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) = U(P, f)$ .

**Teorema 2 [8]**

Misalkan  $I = [a, b]$  dan  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  fungsi terbatas pada  $I$ . Jika  $(P_n)$  barisan partisi dari  $I$  sehingga  $\lim_{n \rightarrow \infty} (U(P_n, f) - L(P_n, f)) = 0$ ,

Maka  $f$  terintegral pada  $I$ , dan  $\lim_{n \rightarrow \infty} (L(P_n, f)) = \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} (U(P_n, f))$ .

**2.8. Integral Tentu**

**Definisi 7 [1]**

Andaikan  $f$  suatu fungsi yang didefinisikan pada selang tutup  $[a, b]$ . Jika  $\lim_{|p| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$  ada, maka dikatakan  $f$  terintegralakan pada  $[a, b]$ . Lebih lanjut  $\int_a^b f(x) dx$ , disebut integral tentu (integral Rieamann)  $f$  dari  $a$  ke  $b$ , diberikan oleh  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{|p| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$ .

**III. HASIL DAN PEMBAHASAN**

Dalam bagian ini, penulis menekankan pada pengembangan contoh integral fungsi ditinjau dari konsep jumlah bawah  $L(P, f)$  dan jumlah atas  $L(P, f)$  serta pengujian hasil menggunakan limit (berdasarkan teorema 2 di atas). Dengan pembatasan pada konsep ukuran partisi seragam.

### 3.1. Partisi Seragam

Partisi seragam yaitu semua sub intervalnya mempunyai panjang sama (syarat  $|p| \rightarrow 0$  dan  $n \rightarrow \infty$  ekuivalen). Misal  $P_n = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  partisi seragam pada  $I = [a, b]$  yaitu  $\Delta x_k = \frac{(b-a)}{n}$  maka diperoleh titik partisi  $x_k = \frac{(b-a)k}{n}$ . Dengan mengambil  $\bar{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$  maka berdasarkan definisi 7 diperoleh bahwa;

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|p| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\bar{x}) (x_k - x_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a + \frac{(b-a)k}{n}).$$

### 3.2. Keterintegralan fungsi dalam konsep jumlah bawah dan jumlah atas

Diberikan  $I = [0, 1]$  dan  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  fungsi terbatas pada  $I$  serta  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  adalah partisi pada  $I$ , dengan selang interval yang sama. Fungsi  $f$  didefinisikan sebagai  $f(x) = x^r$ , dengan  $3 \leq r \leq 6$ ,  $r \in \mathbb{N}$ . Bagaimanakah hasil jumlah bawah  $L(P, f)$  dan jumlah atas  $U(P, f)$  dari fungsi yang ada dan bagaimanakah hasil uji limitnya.

Ditinjau dari bentuk fungsi dan batasannya, maka terdapat 3 permasalahan yang dapat dibahas dalam bagian pembahasan ini, yaitu bentuk fungsi  $f(x) = x^4$ ,  $f(x) = x^5$  dan  $f(x) = x^6$ . Berikut bahasan untuk masing-masing fungsi yang didefinisikan:

1. Diberikan  $f(x) = x^4$  untuk  $0 \leq x \leq 1$  dan misalkan  $P_n$  adalah partisi dari  $I$  dengan  $n$  subinterval yang sama,  $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{(n-1)}{n}, \frac{n}{n} = 1\}$ .

Hitunglah  $L(P_n, f)$  dan  $U(P_n, f)$  dan tunjukkan  $\lim_{n \rightarrow \infty} (U(P_n, f) - L(P_n, f)) = 0$

**Penyelesaian:**  $M_k = (\frac{k}{n})^4$  dan  $m_k = (\frac{k-1}{n})^4$ , untuk  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ .

$$\begin{aligned} \text{Akibatnya: } L(P_n, f) &= \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n (\frac{k-1}{n})^4 (\frac{1}{n}) \\ &= \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^n (k-1)^4 \\ &= \frac{1}{n^5} [0^4 + 1^4 + 2^4 + \dots + (n-1)^4] \\ &= \frac{1}{n^5} \left[ \frac{(n-1)((n-1)+1)(6(n-1)^3 + 9(n-1)^2 + (n-1)-1)}{30} \right] \\ &= \frac{1}{n^5} \left[ \frac{(n^2-n)(6n^3-18n^2+18n-6+9n^2-18n+9+n-2)}{30} \right] \\ &= \frac{1}{n^5} \left[ \frac{(n^2-n)(6n^3-9n^2+n+1)}{30} \right] \\ &= \frac{1}{5} \left[ 1 - \frac{5}{2n} + \frac{5}{3n^2} - \frac{1}{6n^4} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Jadi: } L(P_n, f) = \frac{1}{5} \left[ 1 - \frac{5}{2n} + \frac{5}{3n^2} - \frac{1}{6n^4} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Dan } U(P_n, f) &= \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n (\frac{k}{n})^4 (\frac{1}{n}) \\ &= \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^n (k)^4 \\ &= \frac{1}{n^5} [1^4 + 2^4 + \dots + (n-1)^4 + (n)^4] \\ &= \frac{1}{n^5} \left[ \frac{(n)(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30} \right] \\ &= \frac{1}{n^5} \left[ \frac{(n^2+n)(6n^3+9n^2+n-1)}{30} \right] \\ &= \frac{1}{5} \left[ 1 + \frac{5}{2n} + \frac{5}{3n^2} - \frac{1}{6n^4} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Jadi: } U(P_n, f) = \frac{1}{5} \left[ 1 + \frac{5}{2n} + \frac{5}{3n^2} - \frac{1}{6n^4} \right]$$

$$\text{Oleh karena } L(P_n, f) = \frac{1}{5} \left[ 1 - \frac{5}{2n} + \frac{5}{3n^2} - \frac{1}{6n^4} \right] \text{ dan } U(P_n, f) = \frac{1}{5} \left[ 1 + \frac{5}{2n} + \frac{5}{3n^2} - \frac{1}{6n^4} \right]$$

Hasil Uji berdasarkan teorema 2 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (U(P_n, f) - L(P_n, f)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{5} \left[ 1 + \frac{5}{2n} + \frac{5}{3n^2} - \frac{1}{6n^4} \right] - \frac{1}{5} \left[ 1 - \frac{5}{2n} + \frac{5}{3n^2} - \frac{1}{6n^4} \right] \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left[ \frac{1}{5} + \frac{5}{10n} + \frac{5}{15n^2} - \frac{1}{30n^4} \right] - \left[ \frac{1}{5} - \frac{5}{10n} + \frac{5}{15n^2} - \frac{1}{30n^4} \right] \right) \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= 0$$

Hasil uji menunjukkan bahwa fungsi  $f(x) = x^4$  terintegral pada I, dan  $\lim_{n \rightarrow \infty} (L(P_n, f)) = \int_0^1 f = \lim_{n \rightarrow \infty} (U(P_n, f))$

2. Diberikan  $f(x) = x^5$  untuk  $0 \leq x \leq 1$  dan misalkan  $P_n$  adalah partisi dari I dengan n subinterval yang sama,  $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{(n-1)}{n}, \frac{n}{n} = 1\}$ .

Hitunglah  $L(P_n, f)$  dan  $U(P_n, f)$  dan tunjukkan  $\lim_{n \rightarrow \infty} (U(P_n, f) - L(P_n, f)) = 0$

**Penyelesaian:**  $M_k = \left(\frac{k}{n}\right)^5$  dan  $m_k = \left(\frac{k-1}{n}\right)^5$ , untuk  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Akibatnya:  $L(P_n, f) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n}\right)^5 \left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^6} \sum_{k=1}^n (k-1)^5$$

$$= \frac{1}{n^6} [0^5 + 1^5 + 2^5 + \dots + (n-1)^5]$$

$$= \frac{1}{n^6} \left[ \frac{(n-1)^2 (2(n-1)^4 + 6(n-1)^3 + 5(n-1)^2 - 1)}{12} \right]$$

$$= \frac{1}{n^6} \left[ \frac{(n^2 - 2n + 1) (2n^4 - 8n^3 + 12n^2 - 8n + 2 + 6n^3 - 18n^2 + 18n - 6 + 5n^2 - 10n + 5 - 1)}{12} \right]$$

$$= \frac{1}{n^6} \left[ \frac{(n^2 - 2n + 1) (2n^4 - 2n^3 - n^2)}{12} \right]$$

$$= \frac{1}{6} \left[ 1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{2n^2} - \frac{1}{2n^4} \right]$$

Jadi:  $L(P_n, f) = \frac{1}{6} \left[ 1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{2n^2} - \frac{1}{2n^4} \right]$

Dan  $U(P_n, f) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1})$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^5 \left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^6} \sum_{k=1}^n (k)^5$$

$$= \frac{1}{n^6} [1^5 + 2^5 + \dots + (n-1)^5 + (n)^5]$$

$$= \frac{1}{n^6} \left[ \frac{n^2 (2n^4 + 6n^3 + 5n^2 - 1)}{12} \right]$$

$$= \frac{1}{6} \left[ 1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{2n^2} - \frac{1}{2n^4} \right]$$

Jadi:  $U(P_n, f) = \frac{1}{6} \left[ 1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{2n^2} - \frac{1}{2n^4} \right]$

Oleh karena  $L(P_n, f) = \frac{1}{6} \left[ 1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{2n^2} - \frac{1}{2n^4} \right]$  dan  $U(P_n, f) = \frac{1}{6} \left[ 1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{2n^2} - \frac{1}{2n^4} \right]$

Hasil Uji berdasarkan teorema 2 sebagai berikut:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (U(P_n, f) - L(P_n, f)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{6} \left[ 1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{2n^2} - \frac{1}{2n^4} \right] - \frac{1}{6} \left[ 1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{2n^2} - \frac{1}{2n^4} \right] \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{6} + \frac{3}{6n} + \frac{5}{12n^2} - \frac{1}{12n^4} - \frac{1}{6} + \frac{3}{6n} - \frac{5}{12n^2} + \frac{1}{12n^4} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= 0$$

Hasil uji menunjukkan bahwa fungsi  $f(x) = x^5$  terintegral pada I, dan  $\lim_{n \rightarrow \infty} (L(P_n, f)) = \int_0^1 f = \lim_{n \rightarrow \infty} (U(P_n, f))$ .

3. Diberikan  $f(x) = x^6$  untuk  $0 \leq x \leq 1$  dan misalkan  $P_n$  adalah partisi dari I dengan n subinterval yang sama,  $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{(n-1)}{n}, \frac{n}{n} = 1\}$ .

Hitunglah  $L(P_n, f)$  dan  $U(P_n, f)$  dan tunjukkan  $\lim_{n \rightarrow \infty} (U(P_n, f) - L(P_n, f)) = 0$

**Penyelesaian:**  $M_k = \left(\frac{k}{n}\right)^6$  dan  $m_k = \left(\frac{k-1}{n}\right)^6$ , untuk  $k = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ .

Akibatnya:  $L(P_n, f) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n}\right)^6 \left(\frac{1}{n}\right) \\
 &= \frac{1}{n^7} \sum_{k=1}^n (k-1)^6 \\
 &= \frac{1}{n^7} [0^6 + 1^6 + 2^6 + \dots + (n-1)^6] \\
 &= \frac{1}{n^7} \left[ \frac{(n-1)(12(n-1)^6 + 42(n-1)^5 + 42(n-1)^4 - 14(n-1)^2 + 2)}{84} \right] \\
 &= \frac{1}{7} \left[ 1 - \frac{7}{2n} + \frac{7}{2n^2} - \frac{7}{6n^4} + \frac{1}{6n^6} \right]
 \end{aligned}$$

Jadi:  $L(P_n, f) = \frac{1}{7} \left[ 1 - \frac{7}{2n} + \frac{7}{2n^2} - \frac{7}{6n^4} + \frac{1}{6n^6} \right]$

Dan  $U(P_n, f) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1})$   
 $= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^6 \left(\frac{1}{n}\right)$   
 $= \frac{1}{n^7} \sum_{k=1}^n (k)^6$   
 $= \frac{1}{n^7} [1^6 + 2^6 + \dots + (n-1)^6 + n^6]$   
 $= \frac{1}{n^7} \left[ \frac{(n)(12n^6 + 42n^5 + 42n^4 - 14n^2 + 2)}{84} \right]$   
 $= \frac{1}{7} \left[ 1 + \frac{7}{2n} + \frac{7}{2n^2} - \frac{7}{6n^4} + \frac{1}{6n^6} \right]$

Jadi:  $U(P_n, f) = \frac{1}{7} \left[ 1 + \frac{7}{2n} + \frac{7}{2n^2} - \frac{7}{6n^4} + \frac{1}{6n^6} \right]$

Karena  $L(P_n, f) = \frac{1}{7} \left[ 1 - \frac{7}{2n} + \frac{7}{2n^2} - \frac{7}{6n^4} + \frac{1}{6n^6} \right]$  dan  $U(P_n, f) = \frac{1}{7} \left[ 1 + \frac{7}{2n} + \frac{7}{2n^2} - \frac{7}{6n^4} + \frac{1}{6n^6} \right]$  Hasil Uji berdasarkan teorema 2 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} (U(P_n, f) - L(P_n, f)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{7} \left[ 1 + \frac{7}{2n} + \frac{7}{2n^2} - \frac{7}{6n^4} + \frac{1}{6n^6} \right] - \frac{1}{7} \left[ 1 - \frac{7}{2n} + \frac{7}{2n^2} - \frac{7}{6n^4} + \frac{1}{6n^6} \right] \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{7} + \frac{7}{14n} + \frac{7}{14n^2} - \frac{7}{42n^4} + \frac{1}{42n^6} - \frac{1}{7} + \frac{7}{14n} - \frac{7}{14n^2} + \frac{7}{42n^4} - \frac{1}{42n^6} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Hasil uji menunjukkan bahwa fungsi  $f(x) = x^6$  terintegral pada I, dan  $\lim_{n \rightarrow \infty} (L(P_n, f) - \int_0^1 f) = \lim_{n \rightarrow \infty} (U(P_n, f) - \int_0^1 f) = 0$ .

### III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh kesimpulan bahwa jumlah bawah  $L(P_n, f)$  dan jumlah atas  $U(P_n, f)$  dari fungsi  $f(x) = x^t$ ,  $3 < t \leq 6$ ,  $t \in N$  secara berurutan untuk  $t = 4$ ,  $t = 5$  dan  $t = 6$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 L(P_n, f) &= \frac{1}{5} \left[ 1 - \frac{5}{2n} + \frac{5}{3n^2} - \frac{1}{6n^4} \right] \text{ and } U(P_n, f) = \frac{1}{5} \left[ 1 + \frac{5}{2n} + \frac{5}{3n^2} - \frac{1}{6n^4} \right] \\
 L(P_n, f) &= \frac{1}{6} \left[ 1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{2n^2} - \frac{1}{2n^4} \right] \text{ and } U(P_n, f) = \frac{1}{6} \left[ 1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{2n^2} - \frac{1}{2n^4} \right] \\
 L(P_n, f) &= \frac{1}{7} \left[ 1 - \frac{7}{2n} + \frac{7}{2n^2} - \frac{7}{6n^4} + \frac{1}{6n^6} \right] \text{ and } U(P_n, f) = \frac{1}{7} \left[ 1 + \frac{7}{2n} + \frac{7}{2n^2} - \frac{7}{6n^4} + \frac{1}{6n^6} \right]
 \end{aligned}$$

Dan hasil uji secara berurutan juga diperoleh  $\lim_{n \rightarrow \infty} (U(P_n, f) - L(P_n, f)) = 0$ , kesimpulnya bahwa fungsi yang didefinisikan terintegralkan pada I.

### DAFTAR PUSTAKA

Edwin J. P & Dale. V, 1987. *Calculus with Analytic Geometri*, Jilid 1; Edisi Lima. Terjemahan Nyoman dkk. Jakarta: Erlangga.  
 Bartle, R. G., and D. R. Sherbert. 2000. *Introduction to Real Analysis : Third Edition*. John Willey & Sons, Inc, 605 Third Avenue. New York.  
 Edwin J. P & Dale. V, 1999. *Calculus with Analytic Geometri*, Jilid 2 Terjemahan Nyoman dkk. Jakarta: Erlangga.

- St. Negoro & B. Harahap, 2003. *Ensiklopedia Matematika*, Ghalia indonesia, Jakarta.
- Du Mairy, 2004. *Matematika Terapan untuk Bisnis & Ekonomi*, BPFE. Yogyakarta
- Ruslan laisouw & Hasriani Ishak, 2015, *Menentukan rumus deret hingga bilangan asli pangkat- $r$  menggunakan penekatan binomial dengan uji induksi matematika.*, Jurnal SAINS Vol XII no 3: 15-23
- Totong M & K Murti H, 1993, *Matematika untu Ilmu-ilmu Pertanian, Kehidupan, dan Perilkau*, PT. Gramedia, Jakarta
- Sutrima, 2010. *Analisis Real*, Javatechno Publisher, Sukoharjo, Jawa Tengah. Indonesia
- Barnet A. Raymond, 1981. *Calculus for management, life, and social sciences*; Second Edition, Dellen Publishing Company, Sn Francisco, California.
- Kusrini & Susiswo, 2002. *Pengantar Topologi*, Universitas Terbuka, Jakarta
- Varberg, D., E. J. Purcell, S. E. Rigdon. 2010. *Kalkulus Edisi Kesembilan*. Terjemahan I Nyoman Susila. Erlangga. Jakarta.